# Un problema y dos tareas productivas para trabajar geometría con GeoGebra en un aula de nivel superior

**María Cecilia Papini [1,3], Mauro Natale [2,4], Ana Paula Madrid [2,5], Silvana Inés Soria [1,6], Mariela Balcarce [1,7]**

[1] ECienTec, UNICEN. Tandil, Argentina; [2] NUCOMPA, UNICEN. Tandil, Argentina.

[3] mcpapini@gmail.com

[4] natale.doc@gmail.com

[5] apmadrid@gmail.com

[6] silvanasoria85@gmail.com

[7] maribalcarce2@gmail.com

**Resumen.** En este artículo comunicamos parte del análisis que realizamos a partir de una investigación que recorre el diseño y estudios a priori, la puesta en un aula universitaria y el registro de clases de una secuencia de problemas de geometría para trabajar con GeoGebra. En un trabajo previo comunicamos algunos puntos de partida respecto de cómo concebimos esta experiencia, caracterizamos los problemas de la secuencia y su puesta en el aula. En este trabajo analizamos las potencialidades de uno de los problemas de la secuencia e iniciamos el estudio de las argumentaciones que produce un grupo de estudiantes de nivel universitario durante el proceso de resolución del problema estudiado. Finalmente, en el último apartado planteamos algunos de los resultados de este trayecto de investigación.

**Palabras clave:** enseñanza de geometría en el nivel superior; GeoGebra en la resolución de problemas; modelización; definición; argumentación.

## Algunos puntos de partida

En este trabajo comunicamos parte del análisis de una investigación que recorre el diseño y estudios a priori, la puesta en un aula universitaria y el registro de las escenas de clase de una secuencia de problemas de geometría para trabajar con GeoGebra. Construimos y analizamos la secuencia de problemas, la llevamos a un aula de nivel universitario en el contexto de la materia "Geometría con regla y compás" del segundo año de la carrera de Profesorado en Matemática. Comunicamos más detalles metodológicos en una comunicación anterior (Natale y Papini, 2019).

Desde un punto de vista teórico concebimos la clase como una comunidad que produce conocimientos matemáticos, a partir de la interacción de los alumnos con problemas que los enfrentan a rupturas respecto de los conocimientos que tienen en un cierto momento. Este trabajo matemático de los alumnos no sólo se realiza a nivel personal o individual, en la confrontación de cada alumno con una problemática que ofrece resistencias, sino también a nivel colectivo donde el grupo comparte preguntas, explica y discute procedimientos, argumenta en favor de su validez, acuerda y negocia significados con sus pares y con el docente (Brousseau, 2007; Sadovsky, 2005).

En este caso, estudiamos situaciones de enseñanza de geometría desde una perspectiva que se propone generar condiciones para que los estudiantes produzcan conocimientos geométricos superando aspectos perceptivos de las representaciones de los objetos, realizando inferencias y explicitando relaciones que se apoyan en los datos y las propiedades (Itzcovich, 2005). Consideramos "problemas geométricos" que favorezcan la exploración y producción de conjeturas, la puesta en juego de propiedades geométricas en las resoluciones, la diferenciación entre la representación y el objeto representado, la construcción de argumentos que se ocupen de la validez de las respuestas. Desde esta perspectiva también consideramos fértil el planteo de Itzcovich y Murúa (2016) que detectan una "especie de situación paradójica" interesante para pensar las clases de geometría: si bien el trabajo geométrico conceptual debe superar la percepción al mismo tiempo debe apoyarse fuertemente en las representaciones que requieren de la percepción.

Las ideas de Artigue (2007) nos permiten pensar el rol de las tecnologías digitales en los procesos de aprendizaje, nos resulta fructífero mirar estos procesos como génesis instrumentales, transformaciones de los objetos tecnológicos (para un individuo, colectivo o institución) de artefactos a instrumentos. Las herramientas de la actividad matemática "...modelan los procesos de aprendizaje, sus formas, pero también los conocimientos y saberes que ellas producen…”, tienen una función pragmática y epistémica (Artigue, 2007, p. 5). Propone, entonces, buscar un equilibrio entre los valores pragmático y epistémico de las técnicas instrumentadas para convertir las tecnologías en legítimas y, en particular, matemáticamente útiles para la educación.

Las situaciones de enseñanza mediadas por el uso de programas dinámicos de matemática les permiten a los estudiantes explorar, investigar, conjeturar, y quizás dar inicio a procesos de validación. Arcavi (2003) distingue algunas características que se potencian por el uso de este tipo de programas: la visualización, la experimentación o exploración, la sorpresa, la retroalimentación y la necesidad de pruebas. El autor define, de una manera más compleja que la habitual, la noción de “visualización” como “... la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual” (p.1), involucrando otras habilidades además de las perceptivas. En relación con este sentido, los programas dinámicos no sólo permiten realizar construcciones que cumplan determinadas características y/o modelen movimientos de objetos, sino que permiten realizar transformaciones en tiempo real de estas producciones potenciando posibles visualizaciones diversas. También le permiten al estudiante realizar exploraciones, buscar invariantes y analizar particularidades de los casos extremos o poco típicos. La información obtenida de estas exploraciones puede ser la fuente para enunciar conjeturas y posibles generalizaciones (Arcavi, 2003).

Para estudiar los argumentos de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas nos resultan fértiles las nociones de pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales que propone Balacheff (2000, p. 22). El autor define las pruebas pragmáticas como aquellas que recurren a la acción o a la ostensión, mientras que las intelectuales se separan de la acción apoyándose en formulaciones de las propiedades puestas en juego y de sus relaciones. También aporta a esta distinción las características del uso del lenguaje que se hace en cada caso, mientras las primeras se expresan en un lenguaje de familiaridad (sobre casos particulares, con detalles de interés práctico o anecdóticos, usando nombres propios de personas o de lugares, omitiendo detalles por la cercanía de las personas), las pruebas intelectuales exigen un cambio de posición, alejarse de la acción y de la solución efectiva del problema, para hacer conscientes los conocimientos involucrados como objetos de reflexión, de discurso y de debate. Y, más aún, para la elaboración de pruebas formales y demostraciones, “el lenguaje debe convertirse en una herramienta para el cálculo lógico y no solamente un medio de comunicación” (Balacheff, 2000, p. 23). Esta transformación del lenguaje exige procesos de descontextualización para acceder a categorías de objetos, de despersonalización para separarse del actor, de destemporalización para independizarse de tiempos anecdóticos. La transición de pruebas pragmáticas hacia pruebas intelectuales, se apoya entonces en tres “polos” según el autor: el de los conocimientos, el lingüístico o de la formulación y el de la validación relacionado con la racionalidad que sustenta las pruebas (Balacheff, 2000, pp. 23-24).

En los apartados que siguen analizamos las potencialidades del problema que estudiamos teniendo en cuenta las oportunidades de modelización que ofrece, la dificultad productiva de la tarea de caracterizar un lugar geométrico y algunos de los procesos de validación que favorece.

## Las potencialidades del problema que estudiamos

En este apartado nos ocupamos de resaltar las potencialidades del siguiente problema para favorecer la producción de conocimientos matemáticos y sobre el software GeoGebra: “*Dado un cuadrado de lado 1, caracterizar el lugar geométrico que describe un lado del* cuadrado *cuando gira alrededor del centro del cuadrado”.* El problema propuso a los estudiantes de esta clase dos tareas que resultaron problemáticas: por un lado “observar” el giro del lado de un cuadrado y por otro, caracterizar el lugar geométrico que describe ese movimiento. Estas tareas plantearon incertidumbres, preguntas e intercambios entre estudiantes, idas y vueltas en las construcciones que posibilitaron la producción de nuevos conocimientos en el camino de la resolución. Describimos un ejemplo de estos recorridos de los estudiantes en una comunicación anterior (Natale y Papini, 2019). En los siguientes apartados analizamos estas dos tareas con más detalle: modelizar el problema para resolverlo y caracterizar el lugar geométrico que involucra la resolución.

### *Modelización del problema*

Al enfrentarse con el problema, los estudiantes buscaron maneras de representarlo o, más precisamente, de construir un modelo de un cuadrado de lado 1 que gire para “visualizar” (en el sentido de Arcavi, 2007) la región que describe uno de sus lados.

En particular, un grupo de estudiantes empieza por representar un bosquejo de un cuadrado en papel y dicen, *“me imagino que cada vértice determina una misma circunferencia al rotar, pero ¿qué hace el lado?”*. Podemos identificar, en este primer paso, que disponen de algunos conocimientos geométricos y de una estrategia de representación en lápiz y papel para empezar a abordar el problema. La pregunta *¿qué* *hace el lado?* motoriza una etapa de búsqueda, en la que utilizar GeoGebra tiene sentido (un uso "legítimo" en términos de Artigue, 2007). El dinamismo de este programa les permite nuevas exploraciones y nuevos conocimientos si asumimos el valor epistémico de los instrumentos.

Si bien los alumnos conocían el software y lo habían utilizado en distintos contextos (por ejemplo para realizar construcciones geométricas simples, explorar algún applet, realizar una representación dinámica para verificar alguna propiedad), la construcción de recursos animados o que muestren movimientos de objetos les resultó compleja: requiere en primer lugar "comunicar al programa" que rote un lado del cuadrado (indicar al programa que haga no es lo mismo que hacerlo, *"hacer hacer al programa"* en términos de Laborde, 1998) y esta tarea resultó problemática y productiva para estos estudiantes.

Durante el análisis a priori del problema, anticipamos dos caminos de construcción posibles para modelar la rotación del cuadrado. Si bien en ambos protocolos reconocemos conocimientos de geometría y de GeoGebra que se articulan, podemos identificar que en cada uno hay un protagonismo diferente de unos conocimientos respecto de los otros. En los párrafos que siguen intentamos mostrar algunos aspectos de esta diferencia.

En el protocolo de construcción 1 (https://www.geogebra.org/m/qt3ryktw) consideramos que el protagonismo está puesto en el conocimiento sobre GeoGebra. Quien construye debe reconocer la herramienta *Rotación* (que se aloja en la caja de herramientas *Transformaciones en el plano*) así como tener experiencia en el trabajo con deslizadores y en su utilización para realizar animaciones de objetos. El uso de deslizadores requiere reconocer que ciertos elementos de la construcción pueden o deben considerarse variables, así como poner en juego conocimientos matemáticos para entender qué efectos tienen estas variaciones en la construcción. En nuestro problema, para realizar la animación del movimiento del cuadrado, es necesario definir el ángulo de la rotación con un deslizador.

En el protocolo de construcción 2 (https://www.geogebra.org/m/vhaxpb2g), consideramos que el protagonismo está puesto en conocimientos geométricos. Quien construye debe reconocer que cuando un cuadrado rota utilizando como centro de rotación su propio centro (intersección de las diagonales), los cuatro vértices describen una misma trayectoria circular. Al identificar esta propiedad es posible comenzar la construcción del modelo a partir de una circunferencia y luego construir un cuadrado inscrito en ella, utilizando un punto libre sobre la circunferencia (*Punto en objeto*); el movimiento de este punto alrededor de la circunferencia les permitirá rotar el cuadrado. La construcción de un cuadrado de lado 1 inscrito en la circunferencia requiere considerar que el radio de la misma no es arbitrario, es decir, es necesario poner en juego que las diagonales del cuadrado son dos diámetros perpendiculares de la circunferencia.

El modelo final que los distintos grupos de estudiantes obtuvieron, luego de varias exploraciones, fue el resultado de una secuencia de pasos similar al protocolo de construcción 2 que anticipamos. El comando Rastro y herramientas tales como segmento, segmento dada su longitud, punto medio o centro, recta, mediatriz, bisectriz, tangente, perpendicular, circunferencia, ángulo, distancia o longitud y área han sido los contenidos de estas exploraciones tanto geométricas como sobre el software (detallamos en Natale y Papini, 2019).

*Caracterización del lugar geométrico*

Luego de obtener un modelo del problema, los alumnos encuentran que el giro del segmento determina un “anillo” (o en principio observan, gracias a la animación, que el rastro del segmento que rota queda dentro de un anillo. Ver Figura I) y se plantea la tarea de caracterizar esa región como “lugar geométrico”. En un primer momento los observamos con mucha incertidumbre, se preguntaban en voz alta: “¿Caracterizar el lugar geométrico qué sería? ¿Caracterizar lo que queda pintado? ¿O con decir que queda una corona ya está?” Interpretamos que esta dificultad está relacionada con el hecho de que en las experiencias de trabajo previas no habían tenido que reflexionar sobre cuáles son las condiciones que debe cumplir un lugar geométrico, tampoco tenían experiencia en construir una definición de un objeto geométrico que no es de los más utilizados habitualmente. En el párrafo que sigue nos detenemos a reflexionar sobre la idea de lugar geométrico.

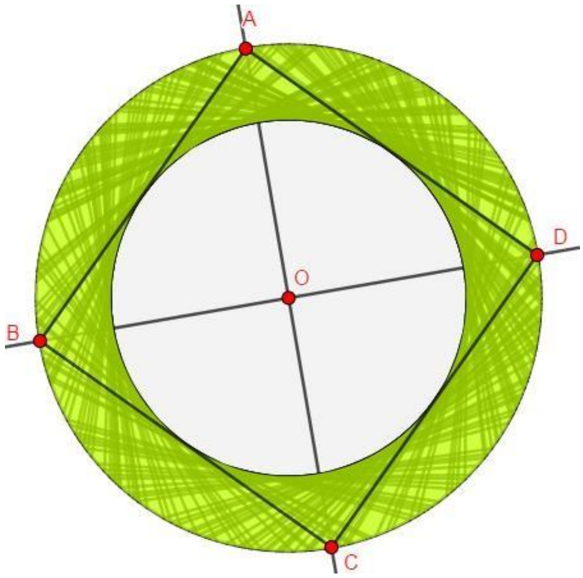


**Figura I:** Imagen en Ggb del lugar geométrico generado por un lado del cuadrado que rota.

El concepto de lugar geométrico es tan antiguo como la propia geometría y se utiliza para definir elementos básicos de la misma, tales como mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, circunferencia de centro O y radio r, entre otros tantos, pero también para definir curvas o regiones más complejas que surgen de transformaciones realizadas a ciertos objetos predeterminados. Consideramos al lugar geométrico como el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen una condición determinada o un conjunto de condiciones. Estas condiciones deben ser mínimas en el sentido de ser las necesarias y suficientes para poder determinar si un punto pertenece o no al lugar geométrico.

Las primeras caracterizaciones que estos estudiantes construyeron del lugar geométrico fueron las siguientes:

> *“queda* ***este*** *anillo” (haciendo referencia a lo que se veía en la pantalla)*
>
> *“un círculo al que* ***le sacás*** *otro círculo que tiene el mismo centro y radio menor”*
>
> *“me queda un anillo* ***formado por dos circunferencias****, una inscrita y otra circunscrita al cuadrado”*

Estas primeras versiones se enriquecieron y complejizaron con los posteriores intercambios de ideas entre los pequeños grupos de trabajo. Por ejemplo, los alumnos avanzaron hacia una caracterización del lugar geométrico como *“...un anillo que se forma cuando a un círculo más grande con centro en las intersecciones de las diagonales del cuadrado, le sacamos un círculo con el mismo centro y radio más chico. El círculo de radio mayor es el que circunscribe al cuadrado y el de radio menor es el* *círculo inscrito en el cuadrado."* También determinaron el valor de cada uno de los radios y el área de la corona.

Las intervenciones del docente, en una dinámica de discusión colectiva, resultaron claves para que la clase pueda avanzar hacia la elaboración de argumentos geométricos que respondan, por ejemplo, a las siguientes preguntas: ¿Por qué el lugar geométrico queda limitado por dos circunferencias con centro en el centro del cuadrado y radios $\sqrt{2}/2$ y $1/2$? ¿Todo punto perteneciente a la zona limitada por las dos circunferencias es parte del lugar geométrico? Es decir ¿La región limitada por las dos circunferencias se cubre por completo? ¿Por qué?

Revisando este recorrido podemos interpretar que las primeras "definiciones" están muy asociadas a la acción y a la ostensión, este proceso nos invita a considerarlas cercanas a la idea de pruebas pragmáticas de Balacheff (2000). Por eso resaltamos con negrita en las primeras caracterizaciones algunos términos que nos remiten a aspectos observables o relacionados con el hacer ("este" anillo, "le sacás" otro círculo, "formado por dos circunferencias"). Podemos pensar que, en un principio, los estudiantes se conforman con una respuesta más pragmática: la observación en pantalla de la figura que determina la rotación del segmento, y pierden de vista u olvidan caracterizarla como lugar geométrico. También podemos considerar que es la primera vez que se les pide una tarea de este tipo: producir una caracterización de un objeto geométrico con esta forma de definición específica. Es una tarea problemática interesante que implica explicitar condiciones que involucran propiedades geométricas y, posiblemente, también otencie la elaboración de argumentos o pruebas intelectuales que validen las afirmaciones (también en términos de Balacheff, 2000). Se trata de promover un proceso de descontextualización y de generalización que incluye conocimientos sobre cómo la Matemática comunica y define sus objetos. Y también recurriendo al mismo autor podemos pensar que el pasaje de pruebas pragmáticas a intelectuales es un proceso que implica conocimientos matemáticos, su formulación y la racionalidad propia de la validación matemática. No es un proceso espontáneo, la intervención del docente es imprescindible por ejemplo para poner en el centro de la reflexión si estas caracterizaciones son suficientes o si el anillo está "correctamente" definido, qué implica estar "correctamente definido", si hay más de una manera de definirlo y, posiblemente, es la primera vez que se hacen estas preguntas. Los conocimientos matemáticos alrededor de “definir” son inherentes a la propia ciencia y esta puede ser una buena oportunidad para abordarlos o al menos hacer un acercamiento a ellos.

Por ejemplo, una de las primeras participaciones fue de una alumna que propone una estrategia de razonamiento por el absurdo que consiste en suponer que el punto de tangencia (entre la circunferencia y el cuadrado) no es el punto medio del lado del cuadrado, sino otro punto y luego analizar sus consecuencias. Si bien esto nos muestra un avance hacia una prueba intelectual, el argumento que propone a continuación nos hace pensar en la convivencia con otros argumentos centrados en la acción y dichos en primera persona del singular: “Si yo lo pongo afuera se va a acercar cada vez más a la circunferencia exterior” (ver puntos K y L de la Figura II).

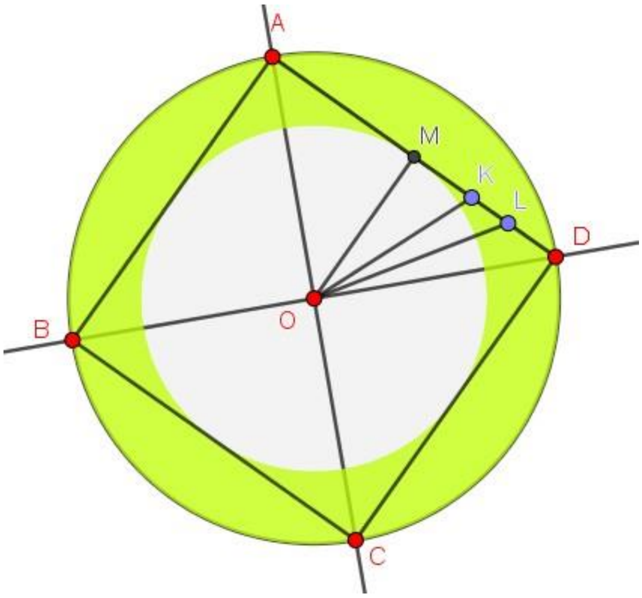


**Figura II:** Puntos sobre el lado del cuadrado

## Conclusiones

Recuperamos en este último apartado algunas de nuestras reflexiones como resultados de este trayecto de investigación. Como dijimos, las dos tareas que el problema plantea, “observar” el giro del lado de un cuadrado y caracterizar el lugar geométrico que describe ese movimiento, resultaron fructíferas en varios sentidos.

En primer lugar, los estudiantes pusieron en juego conocimientos geométricos y sobre el software GeoGebra que disponían, pero necesitaron iniciar una búsqueda de otros conocimientos para construir un modelo con este software que les permitiera “visualizar” la figura que describe un lado del cuadrado cuando éste rota alrededor de su centro. La tarea de “caracterizar el lugar geométrico” representado por el anillo resultó productiva en esta clase, invitó a los estudiantes a tomar distancia de aspectos perceptivos de las representaciones para profundizar en las propiedades geométricas.

Como consecuencia del proceso de resolución del problema, la idea de "lugar geométrico" dejó de ser "transparente" y se posicionó como un objeto de enseñanza y de aprendizaje. La construcción de una definición con estas características resultó un aprendizaje nuevo. Este proceso de construcción implica identificar y explicitar condiciones necesarias y suficientes que requieren de propiedades geométricas para validarse.

Durante la producción de esta definición, los estudiantes trabajaron cuestiones propias y centrales del quehacer matemático: modelizaron el problema para producir conocimientos geométricos nuevos para ellos, hicieron conscientes propiedades geométricas presentes en el modelo para definir matemáticamente un objeto geométrico, argumentaron sobre la validez del modelo y de la propia definición.

Sabemos que los procesos de validación propios de la matemática no se dan habitualmente ni de manera espontánea. La puesta en común y el debate colectivo, con la necesaria mediación del docente, resultaron claves para que la clase pueda avanzar hacia la producción de pruebas intelectuales. Discutir aquello que parece "evidente" puede resultar un "norte" en la conducción de estos procesos.

## Referencias Bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2003). El computador como medio de aprendizaje: Ejemplo de un enfoque. Documento de trabajo del grupo EM&NT, Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, pp. 25-45. Universidad del Valle. Traducido por: Mejía P. y Fernández M., Edinsson.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, pp. 9-21. Edebé Ediciones Internacionales.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Universidad de los Andes.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Traducido por Dilma Fregona. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. y Murúa, R. (2018). GeoGebra: nuevas preguntas sobre viejas tareas. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, (10), pp. 71-85. Recuperado de: https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7698

Natale M. y Papini C. (8-10 de mayo de 2019). Producir geometría con GeoGebra. Una experiencia colaborativa en el nivel universitario [Comunicación oral]. V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata. Recuperado de http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11945/ev.11945.pdf.

Sadovsky, P (2005). *Enseñar matemática hoy*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.